Revista Científica
Vol. 27, No. 01, pp.46-59/Junio 2014
ISSN-E 1995-9516

http://revistas.uni.edu.ni/index.php/Nexo

SOLUCIONES ELEMENTALES DEL OPERADOR LAPLACIANO ITERADO m VECES $\Delta^m\{u(x_1,...x_n)\}=f(x_1,...x_n)$

THE ELEMENTARY SOLUTIONS OF LAPLACIAN OPERATOR ITERATED m TIMES $\Delta^m\{u(x_1,...x_n)\}=f(x_1,...x_n)$

Manuel A. Aguirre[1] & Emilio A. Aguirre
Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada. Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro
Tandil, Provincia de Buenos Aires, Argentina
e-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar ; manuel.aguirre48@gmail.com

(recibido/received: 10-Diciembre-2013; aceptado/accepted: 05-Junio-2014)

RESUMEN

Sea r^{λ} la funcional definida por (9), donde λ es un número complejo. Usando la transformada de Fourier, en este artículo se obtienen soluciones elementales del operador Laplaciano Δ iterado m veces definido por (67). En (61), se obtiene soluciones elementales de la ecuación

$$\Delta^m\{u(x_1,...x_n)\}=f(x_1,...x_n) \tag{1}$$

para n impar y n par bajo la condición $n<\frac{m}{2}$. Para el caso n par y $n\geq\frac{m}{2}$, de (62), se obtienen soluciones elementales de la ecuación (1). En particular si $n=3, m=1$, de (68) $u=u(x_{1,}x_{2,}x_3)$ satisface la ecuación de Poisson.

$$\Delta u(x_{1,}x_{2,}x_3)=f(x_{1,}x_{2,}x_3). \tag{2}$$

Palabras claves: Distribuciones; soluciones elementales; funciones generalizadas; convolución.

ABSTRACT

Let r^{λ} be the functional defined by (9), where λ is a complex number. Using the Fourier transform, in this article we obtain the elementary solutions of Laplacian operator Δ iterated m times defined by (66). From (60), we obtain the elementary solutions of the equation

$$\Delta^m\{u(x_1,...x_n)\}=f(x_1,...x_n) \tag{1}$$

for n odd and n even under condition $n<\frac{m}{2}$. For the case n even and $n\geq\frac{m}{2}$, from (62), we obtain the elementary solution of the equation (1). In particular, if $n=3, m=1$, from (68) $u=u(x_{1,}x_{2,}x_3)$ satisfies Poisson´s equation

$$\Delta u(x_{1,}x_{2,}x_3)=f(x_{1,}x_{2,}x_3). \tag{2}$$

Keywords: Distributions; elementary solutions; generalized functions; convolution.

[1]Este trabajo es parcialmente soportado por la Comisión de Investigaciones Científicas de la provincia de Buenos Aires(C.I.C.),Argentina.

INTRODUCCIÓN

Sea

$$P(D)U = f(x_1,...x_n) \tag{3}$$

cualquier ecuación diferencial con coeficientes constantes y sea f una función generalizada o distribución. Una distribución E es llamada solución elemental o solución fundamental para el operador diferencial $P(D)$ con coeficientes constantes si vale que

$$P(D)E = \delta \tag{4}$$

donde δ es la delta de Dirac o medida de Dirac en el origen. Cuando una solución elemental se conoce, entonces una solución de (3) puede escribirse como la convolución

$$U = f * E. \tag{5}$$

donde con el símbolo $*$ se indica la operación de convolución. Es decir

$$P(D)U = P(D)(f * E) = f * P(D)E = f * \delta = f \tag{6}$$

donde el producto de convolución de dos distribuciones es dedinido por

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle. \tag{7}$$

La existencia de la solución U dependerá de las condiciones impuestas a f y a E, lo cual se sabe que basta que una de ellas sea a soporte compacto para exista el producto de convolución $f * E.$ Se sabe que si tenemos una aplicación lineal:

$$F \ : \ C_0^\infty(R^n) \to C^\infty(R^n) \tag{8}$$

que conmuta con la traslación y es continua en el sentido de que $F(\varphi_j) \to 0$ en $C^\infty(R^n)$ si $\varphi_j \to 0$ en $C_0^\infty(R^n)$ entonces existe una y sólo una distribución T tal que $F(\varphi) = T * \varphi, \forall \varphi \in C_0^\infty(R^n)$ ([5], páginas 15-16). Donde $C_0^\infty(R^n)$ es el conjunto de funciones de R^n a C (números complejos) infinitamente diferenciables con soporte compacto y $C^\infty(R^n)$ es el conjunto de funciones de R^n a C (números complejos) infinitamente diferenciables.

Por otra parte, sea $x = (x_1,...x_n)$ un punto en el espacio Euclideano $n-$ dimensional R^n y sea r^λ la funcional definido por

$$\langle r^\lambda, \varphi \rangle = \int_{R^n} r^\lambda \varphi(x) dx \tag{9}$$

([1], página 71), donde λ es un número complejo, $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$, la función $\varphi(x)$ pertenece a $C_0^\infty(R^n)$ y r es definido por

$$r^2 = |x|^2 = x_1^2 + ... + x_n^2 \tag{10}$$

La funcional r^λ ([1], páginas 72-73) tiene polos simples en los puntos $\lambda = -n - 2j,\ j = 0,1,2,...$ y el residuo viene dado por la siguiente fórmula

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-n-2j} \langle r^\lambda, \varphi \rangle = \frac{\Omega_n \Gamma(\frac{n}{2})}{2^{2j} j! \Gamma(\frac{n}{2} + j)} \langle \Delta^j \delta, \varphi \rangle = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2j} j! \Gamma(\frac{n}{2} + j)} \langle \Delta^j \delta, \varphi \rangle \tag{11}$$

([2], página 792), donde Δ^j es el operador Laplaciano iterado j veces definido por

$$\Delta^j = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)^j . \tag{12}$$

Por otra parte la transformada de Fourier de r^λ está dada por la siguiente fórmula

$$\begin{aligned} F\{r^\lambda\}(y) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} e^{i\langle x, y\rangle} dx = \frac{2^{\lambda+n} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})} \rho^{-\lambda-n} = \\ &= \frac{2^{\lambda+n} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})} \left(y_1^2 + ... + y_n^2\right)^{-\lambda-n} \end{aligned} \tag{13}$$

([1], página 194).

SOLUCIONES ELEMENTALES DE LA ECUACIÓN $\Delta^m\{u\} = f(x_1, \ldots x_n)$

Sea Δ^m el operador definido por (12), vamos a estudiar soluciones elementales de la ecuación

$$\Delta^m\{u\} = f(x_1, ... x_n). \tag{14}$$

Sabemos que E es solución elemental de (14) si

$$\Delta^m\{E\} = \delta(x). \tag{15}$$

Aplicando la transformada de Fourier en (15), se tiene

$$F\{\Delta^m\{E\}\} = F\{\delta(x)\} = 1, \tag{16}$$

por lo tanto

$$F\{E\} = (-1)^m \rho^{-2m}. \tag{17}$$

donde

$$\rho^2 = \left(y_1^2 + ... + y_n^2\right) \tag{18}$$

Ahora vamos a estudiar soluciones elementales E de la ecuación (15).

De (13), se tiene

$$\rho^{-\lambda-n} = \frac{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}} 2^{\lambda+n} \Gamma(\frac{\lambda+n}{2})} F\{r^\lambda\}. \tag{19}$$

Podemos observar que las singularidades de r^λ ocurren en los puntos $\lambda = -n - 2s, s = 0,1,2,...$ y las de $\rho^{-\lambda-n}$ en los puntos $\lambda = 2s, s = 0,1,2,...$

Para $\lambda = 2m - \frac{n}{2}$, vamos a investigar las soluciones elementales E teniendo en cuenta estos puntos singulares de r^λ y de $\rho^{-\lambda-n}$ a través de la ecuación

$$E = F^{-1}\{(-1)^{-m} \rho^{-2m}\}. \tag{20}$$

Caso 1: n impar

1.1. $m < \frac{n}{2}$. En este caso $m \neq -\frac{n}{2} - m, m = 0,1,2,...$, r^λ y $\rho^{-\lambda-n}$ son regulares en $\lambda = m - \frac{n}{2}$, por tanto de (19) y (20), se tiene

$$E_1 = E = F^{-1}\{(-1)^{-m} \rho^{-2m}\} = \frac{(-1)^m \Gamma(\frac{n}{2} - m)}{\pi^{\frac{n}{2}} 2^{2m} \Gamma(m)} r^{2m-n}. \tag{21}$$

Es claro que E definida por (21) verifica la propiedad (15). En efecto, usando la fórmulas

$$\Delta^k r^{\lambda+2k} = 2^{2k} (\tfrac{\lambda}{2} + 1)...(\tfrac{\lambda}{2} + k).$$

$$(\tfrac{\lambda}{2} + \tfrac{n}{2})...(\tfrac{\lambda}{2} + \tfrac{n}{2} + k - 1) r^\lambda \ ([1], \text{página } 73) \tag{22}$$

y

$$\frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2}+m+1)}{\Gamma(\frac{\lambda}{2}+1)} = (\tfrac{\lambda}{2} + 1)...(\tfrac{\lambda}{2} + m) ([4], \text{páginas} 3 - 4)$$

se tiene

$$\Delta^m r^{\lambda+2m} =$$

$$2^{2m} (\tfrac{\lambda}{2} + 1)...(\tfrac{\lambda}{2} + m).(\lambda + \tfrac{n}{2})((\lambda + \tfrac{n}{2} + 1)...(\lambda + \tfrac{n}{2} + m - 1) r^\lambda \tag{23}$$

$$= 2^{2m} \frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2}+m+1)}{\Gamma(\frac{\lambda}{2}+1)} \left[(\lambda + \tfrac{n}{2} + 1)...(\lambda + \tfrac{n}{2} + m - 1)\right]\left[(\lambda + \tfrac{n}{2}) r^\lambda\right].$$

Haciendo $\lambda = -\frac{n}{2}$ en (23) y usando (11)se tiene

$$\Delta^m \{ r^{2m-n} \} = 2^{2m} \lim_{\lambda \to -\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2}+m+1)}{\Gamma\frac{\lambda}{2}+1)} . [1.2.3...(m-1)].$$

$$. \left[\lim_{\lambda \to -\frac{n}{2}} (\tfrac{\lambda+n}{2}) r^{\lambda} \right] = \tag{24}$$

$$= \frac{2^{2m} \Gamma(m-\frac{n}{2}+1)(m-1)! e^{\mp\frac{\nu\pi i}{2}}}{\Gamma(1-\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \delta(x).$$

De (21), (24) y usando la fórmula

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{25}$$

([4], página 3-4) se obtiene

$$\Delta^m \{ E \} = \delta(x). \tag{26}$$

Por lo tanto E definida por (21) para el caso n impar es solución elemental de la ecuación (14).

1.2. n impar, $m > \frac{n}{2}$. En este caso tanto r^{λ} y $\rho^{-\lambda-n}$ son regulares en $\lambda = m - \frac{n}{2}$, por lo tanto la solución elementa E es la misma definida por (21). Así se tiene

$$E_2 = E = F^{-1} \{ (-1)^{-m} \rho^{-2m} \} = \frac{(-1)^m \Gamma(\frac{n}{2} - m)}{\pi^{\frac{n}{2}} 2^{2m} \Gamma(m)} r^{2m-n}. \tag{27}$$

Por tanto de (27) y usando (26) se tiene

$$\Delta^m \{ E_2 \} = \Delta^m \{ E \} = \delta(x) \tag{28}$$

si n es impar y $m > \frac{n}{2}$.

Podemos observar de (21) y (27) que la función gama evaluada en los puntos $\frac{n}{2} - m,$

$$\Gamma(\frac{n}{2} - m) \tag{29}$$

está fuera de sus singularidades dado que n es impar y las singularidades de la función gama $\Gamma(z)$ ocurren en los puntos $z = 0, -1 - 2 - 3...$

Caso 2: n par

2.1. n par y $m < \frac{n}{2}$. En este caso r^{λ} y $\rho^{-\lambda-n}$ son regulares en $\lambda = m - \frac{n}{2}$, además la función gama definida en (29) está fuera de sus singularidades dado que $m - \frac{n}{2} > 0$, por lo tanto la solución elemental

E es la misma definida por (21). Así se tiene

$$E_3 = E = F^{-1}\left\{(-1)^{-m}\rho^{-2m}\right\} = \frac{(-1)^m\Gamma(\frac{n}{2}-m)}{\pi^{\frac{n}{2}}2^{2m}\Gamma(m)}r^{2m-n}, \tag{30}$$

y usando (26) se tiene

$$\Delta^m E_3 = \delta(x). \tag{31}$$

es solución elemental del operador Δ^m definido (7) bajo las condiciones n par y $m < \frac{n}{2}$.
Podemos observar de (26), (28) y (31) que

$$E_1 = E = \frac{(-1)^m\Gamma(\frac{n}{2}-m)}{\pi^{\frac{n}{2}}2^{2m}\Gamma(m)}r^{2m-n}. \tag{32}$$

$$\text{si } n \text{ es impar y } m < \tfrac{n}{2},$$

$$E_2 = E = \frac{(-1)^m\Gamma(\frac{n}{2}-m)}{\pi^{\frac{n}{2}}2^{2m}\Gamma(m)}r^{2m-n} \tag{33}$$

$$\text{si } n \text{ es impar y } m > \tfrac{n}{2}$$

y

$$E_3 = E = \frac{(-1)^m\Gamma(\frac{n}{2}-m)}{\pi^{\frac{n}{2}}2^{2m}\Gamma(m)}r^{2m-n} \tag{34}$$

$$\text{si } n \text{ es par y } m < \tfrac{n}{2}$$

para $m = 1, 2, 3, ...$ son soluciones elementales de la ecuación

$$\Delta^m\{u(x_1, ...x_n)\} = f(x_1, ...x_n). \tag{35}$$

Por otra parte es claro que usando (26), si $u(x_1, ...x_n) = E(x_1, ...x_n)$ es una solución elemental de Δ^m entonces la solución de (14) está dada por la siguiente fórmula

$$u = u(x_1, ...x_n) = f(x_1, ...x_n) * E \tag{36}$$

para $f(x_1, ...x_n)$ función generalizada con soporte compacto , donde el símbolo $*$ significa convolución.

2.2. n par y $m \geq \frac{n}{2}$. En este caso $m = \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, ...$, $\rho^{-\lambda-n}$ tiene polos simples en $\lambda = 2m - n$ y r^{λ} es regular en $\lambda = 2m - n.$ Los valores de la funcional $\rho^{-\lambda-n}$ en $\lambda = 2m - n$ la cual se podría llamar ρ^{-2m} , es el valor en $\lambda = 2m - n$ de la parte regular del desarrollo en serie de Laurent de $\rho^{-\lambda-n}$ en el punto $\lambda = -(n-2m),$ a saber

$$\rho^{-2m} = \lim_{\lambda \to -(n-2m)} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\lambda + n - 2m)\rho^{-\lambda--n}\right]. \tag{37}$$

Sabemos que la función generalizada ρ^{-2m} no es el valor de $\rho^{-\lambda--n}$ en $\lambda = -(n-2m)$, $\rho^{-\lambda--n}$ tiene polos simples en $\lambda = -(n-2m),$ para n par y $m \geq \frac{n}{2}$. Sin embargo, la función ρ^{-2m} es en cierto sentido la regularización de la función ordinaria ρ^{-2m}. La expresión (37) la llamaremos parte finita de $\rho^{-\lambda--n}$ en $\lambda=-(n-2m)$, y se indicará en forma abreviada $p.f.$ Tomando en cuenta que $m \geq \frac{n}{2}, n$ para, de (37), se tiene

$$\rho^{-2m} = p.f_{\gamma=-2m}\ \rho^{\gamma} = \lim_{\beta=-\frac{n}{2}-j)} \frac{\partial}{\partial\beta}\left[(\beta+n+2j)\rho^{\beta}\right] \tag{38}$$

para $m=\frac{n}{2}+j,\ j=0,1,2,...$

De(37) y usando(17) se tiene

$$\rho^{-2m} =$$

$$p.f_{\gamma=-2m}\ \rho^{\gamma} =$$

$$= \lim_{\beta=-\frac{n}{2}-j)} \tfrac{\partial}{\partial\beta}\left[(\beta+n+2j)\rho^{\beta}\right]$$

$$\pi^{-\frac{n}{2}} \lim_{\beta=--n-2j} \tfrac{\partial}{\partial\beta}(\beta+n+2j)\left[\Gamma(\tfrac{\beta+n}{2})2^{2\beta}\ \tfrac{F\left\{r^{-\beta-n}\right\}}{\Gamma(-\frac{\beta}{2})}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}$$

$$\lim_{\beta\to-n-2j}\left\{\tfrac{\Gamma(-\frac{\beta}{2})}{(\Gamma(-\frac{\beta}{2}))^2}\ \tfrac{\partial}{\partial\beta}\left[(\beta+n+2j)\Gamma(\tfrac{\beta+n}{2})2^{2\beta}F\left\{r^{-\beta-n}\right\}\right]-\right.$$

$$\tfrac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}.\left[(\beta+n+2j)\Gamma(\tfrac{\beta+n}{2})2^{2\beta}F\left\{r^{-\beta-n}\right\}\right]\tfrac{\Gamma^{`}(-\frac{\beta}{2})}{(\Gamma(-\frac{\beta}{2}))^2}(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}.$$

$$\lim_{\beta\to-n-2j}\left\{\tfrac{1}{(\Gamma(-\frac{\beta}{2}))}\ \tfrac{\partial}{\partial\beta}\left[(\beta+n+2j)\Gamma(\tfrac{\beta+n}{2})\right]\left[2^{2\beta}F\left\{r^{-\beta-n}\right\}\right]+\right.$$

$$+\tfrac{1}{(\Gamma(-\frac{\beta}{2}))}(\beta+n+2j)\Gamma(\tfrac{\beta+n}{2})2^{2\beta}\ln 2.F\left\{r^{-\beta-n}\right\}+$$

$$+\tfrac{1}{(\Gamma(-\frac{\beta}{2}))}\left[(\beta+n+2j)\Gamma(\tfrac{\beta+n}{2})2^{2\beta}F\left\{r^{-\beta-n}\right\}\ln r(-1)\right]+ \tag{39}$$

$$\left.\left[\frac{(\beta+n+j)\Gamma(\frac{\beta+n}{2})2^{2\beta}F\left\{(G\pm i0)^{-\beta-\frac{n}{2}}\right\}}{(\Gamma(-\frac{\beta}{2}))}\right].\tfrac{\Gamma^{`}(-\frac{\beta}{2})}{(\Gamma(-\frac{\beta}{2}))}\right\}$$

Ahora tomando en cuenta que

$$\lim_{\beta\to -n-2j} \tfrac{\partial}{\partial\beta}\left[(\beta+n+2j)\Gamma(\tfrac{\beta+n}{2})\right] = \lim_{z=-j} \tfrac{\partial}{\partial z}\left[(z+j)\Gamma(z)\right] =$$

$$= \underset{z=-j}{p.f\ \Gamma(z)} = \tfrac{(-1)^j}{j!}\psi(j+1) = \tfrac{(-1)^{m-\frac{n}{2}}}{(m-\frac{n}{2})!}\psi(m-\tfrac{n}{2}+1) \tag{40}$$

Y

$$\lim_{\beta\to -n-2j}\left[(\beta+n+2j)\Gamma(\beta+\tfrac{n}{2})\right] = 2\lim_{z=-j}\left[(z+j)\Gamma(z)\right] =$$

$$= 2\underset{z=-j}{\operatorname{Re}s}\,\Gamma(z) = \tfrac{(-1)^j}{j!} = \tfrac{2(-1)^{m-\frac{n}{2}}}{(m-\frac{n}{2})!}, \tag{41}$$

Donde

$$\psi(z) = \frac{\Gamma`(z)}{(\Gamma(z))}. \tag{42}$$

([4], página 4). De (39), se obtiene

$$\rho^{-2m} = \tfrac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}.$$

$$.\tfrac{2^{-2m}(-1)^{m-\frac{n}{2}}}{\Gamma(m)(m-\frac{n}{2})!}\left\{F\left\{r^{m-\frac{n}{2}}\right\} + 2\ln 2F\left\{r^{m-\frac{n}{2}}\right\}\right. \tag{43}$$

$$\left. - F\left\{r^{m-\frac{n}{2}}\ln r\right\} + F\left\{r^{m-\frac{n}{2}}\right\}\psi(m)\right\}$$

De (20) y (43), se obtiene la siguiente fórmula

$$E_4 = E = F^{-1}\left\{(-1)^{-m}\rho^{-2m}\right\} = F^{-1}\left\{(-1)^{-m}\underset{\gamma=-2m}{p.f\ \ \rho^{\gamma}}\right\} =$$

$$= \tfrac{(-1)^m}{\pi^{\frac{n}{2}}}.\tfrac{(-1)^{m-\frac{n}{2}}2^{-2m}}{\Gamma(k)(m-\frac{n}{2})!}(1+\ln 2-\psi(m))r^{m-\frac{n}{2}} -$$

$$- \tfrac{(-1)^m}{\pi^{\frac{n}{2}}}.\tfrac{(-1)^{m-\frac{n}{2}}2^{-2m}}{\Gamma(m)(m-\frac{n}{2})!}r^{m-\frac{n}{2}}\ln r = \tag{44}$$

$$= A_{m,n}r^{-m-\frac{n}{2}} + B_{m,n}r^{m-\frac{n}{2}}\ln r$$

Donde

$$A_{m,n,\nu} = \frac{(-1)^m}{\pi^{\frac{n}{2}}}.\frac{(-1)^{m-\frac{n}{2}}2^{-2m}}{\Gamma(m)(m-\frac{n}{2})!}(1+\ln 2-\psi(m)) \tag{45}$$

y

$$B_{m,n,\nu}=-\frac{(-1)^m}{\pi^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{(-1)^{m-\frac{n}{2}}2^{-2m}}{\Gamma(m)(m-\frac{n}{2})!}. \tag{46}$$

Es claro que $E_4=E$ definida por (44) verifica la propiedad (15). En efecto, usando las fórmulas (22) y (23) se tiene

$$\Delta^m\left\{r^{2m-n}\right\}=\lim_{\lambda\to-n}\Delta^m r^{\lambda+2m}=2^{2m}(m-1)!\lim_{\lambda\to-n}\frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2}+1+m)r^{\lambda}}{\Gamma(\frac{\lambda}{2}+1)\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}\lambda=$$

$$=2^{2m}(m-1)!\lim_{\lambda\to-n}\frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2}+1+m)}{\Gamma(\frac{\lambda}{2}+1)}\cdot\frac{\operatorname{Res}_{\lambda=-n} r^{\lambda}}{\lim_{z\to0} z\,\Gamma(\frac{z}{2})}= \tag{47}$$

$$=\frac{2^{2m}(m-1)!\Gamma(m-\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(-\frac{n}{2}+1)}\cdot\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\delta(x)=0$$

para n par y $m\geq\frac{n}{2}$. por tanto, de (44) y usando (47) se tiene

$$\Delta^m\left\{E\right\}=B_{m,n,q}\Delta^m\left\{r^{2m-n}\right\}\ln r. \tag{48}$$

Para investigar que $\Delta^m\left\{E\right\}$ es solución elemental, hacemos el desarrollo en serie de Taylor de $r^{\lambda+2k}$ alrededor del punto $\lambda=-n$ para $k=m.$ Por otra parte en un entorno del punto singular $\lambda=-n-2s, s=0,1,2,...$ se puede escribir

$$r^{\lambda}=\frac{C_{-1}}{\lambda+n+2s}+C_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}C_{\nu}(\lambda+n+2s)^{\nu} \tag{49}$$

([1], página 195), donde

$$C_{-1}=\operatorname{Res}_{\lambda=-n-2s,\,s=0,1,2,...} r^{\lambda} \tag{50}$$

y

$$C_0=\lim_{\lambda\to-n-2s,\,s=0,1,2,...}\frac{d}{d\lambda}\left(\lambda+n+2s\right)r^{\lambda} \tag{51}$$

El término C_0 de acuerdo con (38) se le llama parte finita de r^{λ} en $\lambda=-n-2s.$

El desarrollo en serie de Taylor de $r^{\lambda+2m}$ alrededor de $\lambda=-\frac{n}{2},$ está dado por

$$r^{\lambda+2m}=r^{2m-n}+(r^{2m-n}\ln r)(\lambda+\tfrac{n}{2})+$$
$$+(r^{2m-n}\ln^2 r)(\lambda+\tfrac{n}{2})^2+\ldots \tag{52}$$

Por otra parte, usando la fórmula (22) y considerando la propiedad

$$(\lambda+\frac{n}{2})=\frac{\Gamma(\lambda+\frac{n}{2}+1)}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+\frac{n}{2}-1)\Gamma(\lambda+1)} \tag{53}$$

para n par, se tiene

$$\Delta^m\left\{r^{\lambda+2m}\right\}=$$
$$2^{2m}(\tfrac{\lambda}{2}+1)\ldots(\tfrac{\lambda}{2}+m)((\tfrac{\lambda}{2}+\tfrac{n}{2}+1)\ldots(\tfrac{\lambda}{2}+\tfrac{n}{2}+m-1)\left[(\tfrac{\lambda}{2}+\tfrac{n}{2})r^{\lambda}\right]=$$
$$=2^{2m}(\tfrac{\lambda}{2}+1)\ldots(\tfrac{\lambda}{2}+m)((\tfrac{\lambda}{2}+\tfrac{n}{2}+1)\ldots(\tfrac{\lambda}{2}+\tfrac{n}{2}+m-1)\left[(\tfrac{\lambda}{2}+\tfrac{n}{2})r^{\lambda}\right]\tfrac{(\lambda+n)}{(\lambda+n)}= \tag{54}$$
$$=\frac{2^{2m}\Gamma(\frac{\lambda}{2}+1+m).\left[(\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{2}-1\ldots(\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{2}+m-1)\right]\left[(\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{2})r^{\lambda}\right](\lambda+n)}{2\Gamma((\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{2}+1))}.$$

De (52) y usando (47), se tiene

$$\Delta^m\left\{r^{\lambda+2m}\right\}=\Delta^m\left\{r^{2m-n}\right\}+\Delta^m\left\{r^{2m-n}\ln r\right\}(\lambda+n)+$$
$$+\Delta^m\left\{r^{2m-n}\ln^2 r\right\}(\lambda+n)^2+\ldots= \tag{55}$$
$$=\Delta^m\left\{r^{2m-n}\ln r\right\}(\lambda+n)+\Delta^m\left\{r^{2m-n}\ln^2 r\right\}(\lambda+n)^2+\ldots$$

Ahora comparando los coeficientes de $(\lambda+\frac{n}{2})$ en ambos lados de las ecuaciones (55) y (54), se tiene

$$\Delta^m\left\{r^{2m-n}\ln r\right\}=$$
$$=\lim_{\lambda\to-n}\frac{2^{2m}\Gamma(\frac{\lambda}{2}+1+m).\left[(\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{2}-1\ldots(\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{2}+m-1)\right]\left[(\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{2})r^{\lambda}\right](\lambda+n)}{2\Gamma((\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{2}+1))}=$$
$$=\tfrac{1}{2}.2^{2m}\Gamma(m-\tfrac{n}{2}+1).(m-1)!(-1)^{\frac{n}{2}-1}(\tfrac{n}{2}-1)!\lim_{\lambda=-n}\left[\left[(\tfrac{\lambda}{2}+\tfrac{n}{2})r^{\lambda}\right]\right]= \tag{56}$$
$$=\tfrac{1}{2}.2^{2m}\Gamma(m-\tfrac{n}{2}+1).(m-1)!(-1)^{\frac{n}{2}-1}(\tfrac{n}{2}-1)!\tfrac{1}{2}\operatorname{Re}s_{\lambda=-n}\, r^{\lambda}.$$

De (56) y usando (50), se tiene

$$\Delta^m\left\{r^{2m-n}\ln r\right\}=\tfrac{1}{2}.2^{2m}\Gamma(m-\tfrac{n}{2}+1).(m-1)!(-1)^{\frac{n}{2}-1}(\tfrac{n}{2}-1)!\tfrac{1}{2}.\tfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\delta(x)$$

(57)

$$\tfrac{1}{2}2^{2m}\Gamma(m-\tfrac{n}{2}+1).(m-1)!(-1)^{\frac{n}{2}-1}\pi^{\frac{n}{2}}\delta(x).$$

De (48), usando (47) y (57), se obtiene

$$\Delta^m\left\{E\right\}=\delta(x). \tag{58}$$

Por tanto de (44), usando (47) y (58), se obtiene

$$E=E_4=B_{m,n,\nu}r^{2m-n}\ln r$$

(59)

$$\text{si } n \text{ es par y } m\geq\tfrac{n}{2}.$$

es solución elemental de la ecuación (35), donde

$$B_{m,n,\nu}=-\frac{(-1)^m}{\pi^{\frac{n}{2}}}.\frac{(-1)^{m-\frac{n}{2}}2^{-2m}}{\Gamma(m)(m-\frac{n}{2})!}. \tag{60}$$

Observe que de (47) r^{2m-n} es solución homogénea de la ecuación (14) si n es par y $m\geq\frac{n}{2}$.

En conclusión tenemos que

$$E=E_1=E_2=E_3=\frac{(-1)^m\Gamma(\frac{n}{2}-m)}{\pi^{\frac{n}{2}}2^{2m}\Gamma(m)}r^{2m-n} \tag{61}$$

es solución elemental del operador Δ laplaciano iterado m bajo las siguientes condiciones: para n impar ya sea tanto para $n<\frac{m}{2}$ como para $n>\frac{m}{2}$; también vale la solución (61) para el caso n par pero bajo la condición $n<\frac{m}{2}$. Además

$$E=E_4=A_{m,n}r^{-m-\frac{n}{2}}+B_{m,n}r^{m-\frac{n}{2}}\ln r \tag{62}$$

es solución elemental si n es par y $n\geq\frac{m}{2}$.

Podemos indicar que el estudio de soluciones elementales del operador laplaciano iterado m veces aparece en ([1], páginas 201-202) y en las soluciones elementales que se presentan no se explicitan los valores de las constantes dadas, en nuestros estudios las fórmulas (32), (33), (34) y (62) son expresadas indicando los valores de los coeficientes en cada expresión de dichas constantes.

Sabemos de (2) y (4) que cuando se conoce una solución elemental de

$$\Delta^m \{u(x_{1,\ldots}x_n)\} = f(x_{1,\ldots}x_n) \tag{63}$$

la solución de la ecuación(62) viene dada por la fómula:

$$u(x_{1,\ldots}x_n) = f(x_{1,\ldots}x_n) * E(x_{1,\ldots}x_n) \tag{64}$$

para $f(x_{1,\ldots}x_n)$ función generalizada con soporte compacto, donde el símbolo $*$ significa convolución y E es definida por (61) y(62).

EJEMPLOS

Si $n = 3,$ de (64),usando (21) se tiene

$$u(x_{1,}x_{2,}x_3) = f(x_{1,}x_{2,}x_3) * E(x_{1,}x_{2,}x_3) = f * \frac{(-1)^m \Gamma(\frac{3}{2} - m)}{\pi^{\frac{3}{2}} 2^{2m} \Gamma(m)} r^{2m-3} \tag{65}$$

es la solución de la ecuación

$$\Delta^m \{u(x_{1,}x_{2,}x_3)\} = f(x_{1,}x_{2,}x_3) \tag{66}$$

Donde

$$\Delta^m = \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)^m \tag{67}$$

para todo $m \geq 1.$

Si $m = 1$, se tiene

$$u(x_{1,}x_{2,}x_3) = f * \frac{(-1)\Gamma(\frac{3}{2}-1)}{\pi^{\frac{3}{2}} 2^2 \Gamma(1)} r^{-1} = f * \frac{(-1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\pi^{\frac{3}{2}} 4} \frac{1}{r} =$$

$$= \frac{-\sqrt[2]{\pi}}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{R^3} \frac{f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\sqrt[2]{(\xi_1 - x_{1,})^2 + (\xi_2 - x_{2,})^2 + (\xi_3 - x_{3,})^2}} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \tag{68}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\sqrt[2]{(\xi_1 - x_{1,})^2 + (\xi_2 - x_{2,})^2 + (\xi_3 - x_{3,})^2}} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

satisface la ecuación

$$\Delta u(x_{1,}x_{2,}x_3) = f(x_{1,}x_{2,}x_3). \tag{69}$$

A la función $u(x_{1,}x_{2,}x_3)$ se le conoce como el potencial gravitacional de una distribución de densidad de masa continua a trozos y satisface la clásica ecuación de Poisson, por tanto la solución elemental encontrada en (21) permite generalizar la clásica fórmula de Poisson.
Si $n=2$ y $m=1,$ de (44, 45 y 46) se tiene

$$\begin{aligned} E_4 &= A_{1,1}r^0 + B_{1,2}r^0\ln r = (-1)\pi^{-1}2^{-2}\left[2\psi(1)+2\ln 2\right]+\left[-2\pi^{-1}(-1)2^{-2}\right]\ln r = \\ &= -\tfrac{1}{4\pi}\left[2\psi(1)+2\ln 2\right]+\tfrac{1}{2\pi}\ln r = Cons\tan te + \tfrac{1}{2\pi}\ln r \end{aligned} \tag{70}$$

es solución elemental de la ecuación

$$\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)u(x_{1,}x_{2,}) = f(x_{1,}x_{2,}). \tag{71}$$

Podemos observar de (58),(70) y (71) que para el caso $n=2, m=1$,

$$\text{si } \Delta E_4 = \delta \Rightarrow \Delta(\frac{1}{2\pi}\ln r) = \delta \Rightarrow \Delta\ln r = 2\pi\delta \Rightarrow \Delta\ln(\frac{1}{r}) = -2\pi\delta. \tag{72}$$

La fórmula

$$\Delta\ln(\frac{1}{r}) = -2\pi\delta \tag{73}$$

coincide con la fórmula (II, 3, 14) dada por Laurent Schwartz en ([6], página 46) y([1], página 29)

Si n es par y $n>2$ para $m=1,$ de (29) se tiene

$$E_3 = \frac{(-1)\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\pi^{\frac{n}{2}}2^2\Gamma(1)}r^{2-n}, \tag{74}$$

llamando

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \tag{75}$$

área de la esfera unitaria, la fórmula (74) se puede expresar como

$$E_3 = -\left(\Omega_n(n-2)^{-1}\right)r^{2-n}, \tag{76}$$

por tanto de (76) y usando (31) se tiene

$$\Delta\left\{\frac{1}{r^{n-2}}\right\} = -\left(\Omega_n(n-2)\right)\delta(x) \tag{77}$$

para $n > 2.$ La fórmula (79) aparece en ([1],página 29).

Existen varios métodos para encontrar soluciones elementales:

1) Utilizando la definición de soluciones elementales,
2) Método de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales o de ecuaciones integrales y
3) Método de la transformada de Fourier o de la Laplace. En nuestro estudio hemos elegido el camino de la transformada de Fourier.

Podemos indicar que el estudio de soluciones elementales del operador laplaciano iterado m veces aparece en ([1], páginas 201-202) y en las soluciones elementales que se presentan no se explicitan los valores de las constantes dadas, en nuestros estudio las fórmulas (32), (33), (34) y (62) son expresadas indicando los valores de los coeficientes en cada expresión de dichas constantes.

REFERENCIAS

[1] Gelfand I.M. and Shilov G.E.,Generalized Functions,Vol.I,Academic Press,New York,1964.

[2] Aguirre, M. A. and Barrenechea, A.L., A relation between the derivative of the Dirac delta in $(P \pm i0)^{\lambda}$, Journal of Computational and Applied Mathematics 108 (1999), pp. 31-40.

[3] Aguirre M. A., A convolution product of (2j) th derivative of Dirac´s delta in r and multiplicative distributional product between r^{-k} and $\nabla(\Delta^j \delta),$ IJMMS 2003,pp. 789-799.

[4] A. Erdelyi,Ed. Higher Trascendental Functions, Vol.I, and II,McGraw-Hill,New York,1953.

[5] Hörmander L., Linear Partial Differential Operators, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1976

[6] Schwartz,L.., Théorie des distributions,Hermann, Paris, 1966.

Manuel A. Aguirre, Profesor y Decano
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro de la Prov. de Buenos Aires
Paraje Arroyo Seco, 7000-Tandil
Provincia de Buenos Aires, Argentina
Tel.: +54 2293 439657
E-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar